Pregunta (1)

$$\lim_{x \to \infty} \left(\sin\left(\frac{1}{x}\right) + \cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{x} \to e$$

Si evaluamos el limite nos da la indeterminacion 1^infty por lo que tomamos neperiano y nos queda

$$\lim_{x \to \infty} e^{x \cdot \ln\left(\sin\left(\frac{1}{x}\right)+\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)} = e^{\lim_{x \to \infty} \left(x \cdot \ln\left(\sin\left(\frac{1}{x}\right)+\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)\right)}$$

por ser la funcion exponencial una funcion continua. Teorema

$$L := \lim_{x \to \infty} \left(x \cdot \ln\left(\sin\left(\frac{1}{x}\right) + \cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)\right)$$

nos queda la indeterminacion 0.∞

Por arreglo
$$\lim_{x \to \infty} \frac{\ln\left(\sin\left(\frac{1}{x}\right) + \cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)}{\frac{1}{x}} = \frac{0}{0}$$
por la regla de L;Hopital

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\frac{d}{dx}\left(\ln\left(\sin\left(\frac{1}{x}\right) + \cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)\right)}{\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right)}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\ln\left(\sin\left(\frac{1}{x}\right) + \cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)\right) \to -\frac{\frac{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2} - \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2}}{\cos\left(\frac{1}{x}\right) + \sin\left(\frac{1}{x}\right)}$$

Nos queda simplificando
$$\lim_{x \to \infty} -\frac{-\cos\left(\frac{1}{x}\right) + \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\cos\left(\frac{1}{x}\right) + \sin\left(\frac{1}{x}\right)} \to 1$$

Recordando la exponencial nos queda el valor inicial.

Pregunta (2)

a.- $\displaystyle\int \sqrt{1 - e^{x}}\, dx$ haciendo la sustitucion $u^2 = 1 - e^{x}$ implica $2u \cdot du = -e^{x}\, dx$

por lo que
$$I := \int \frac{2 \cdot u^2}{u^2 - 1}\, du \to 2 \cdot u + \ln(u - 1) - \ln(u + 1) \quad +C$$

Se resuelve por fracciones simples, o sustitucion trigonometrica

Regresando el cambio

$$I := 2\sqrt{1-e^{x}} + \ln\left(\frac{\sqrt{1-e^{x}}-1}{\sqrt{1-e^{x}}+1}\right) +C$$

b.- $\int (\csc(x)+\sec(x))^2\,dx$

Desarrollando el cuadrado se tiene

$$\int \csc(x)^2 + 2\cdot\csc(x)\cdot\sec(x) + \sec(x)^2\,dx \rightarrow \tan(x) - \cot(x) + 2\cdot\ln(\tan(x)) \quad +C$$

Otra opcion

$$\int \csc(x)^2 + 2\cdot\frac{2}{\sin(x)\cos\cdot(x)\cdot 2} + \sec(x)^2\,dx = \int \csc(x)^2 + 4\cdot\csc(2x) + \sec(x)^2\,dx$$

$$\int \csc(x)^2 + 4\cdot\csc(2x) + \sec(x)^2\,dx \rightarrow \tan(x) - \cot(x) + 2\cdot\ln(\tan(x)) \quad +C$$

O bien $I := \tan(x) - \cot(x) + 2\ln(\csc(2x) - \cot(2x))$ +C

c.- $\int \frac{-2x-4}{x^3+x^2+x}\,dx \rightarrow 2\cdot\ln\left(x^2+x+1\right) - 4\cdot\ln(x) + C$

Realizando la integral por fracciones simple se tiene

$$\frac{-2x-4}{x^3+x^2+x} = \frac{A}{x} + \frac{B\cdot x + C}{x^2+x+1}$$

Donde $C := 2 \quad B := 4 \quad A := -4$

Por lo que

$$I := \int \frac{A}{x} + \frac{B\cdot x + C}{x^2+x+1}\,dx \text{ simplify } \rightarrow 2\cdot\ln\left(x^2+x+1\right) - 4\cdot\ln(x) + C$$

Pregunta (3)

Resolviendo la integral indefinida

$$\int \frac{1}{x\cdot\sqrt{x^2-4}}\,dx$$

sustitucion trigonometrica $x = 2\sec(\alpha)$ implica

$$dx = 2\cdot\sec(\alpha)\tan(\alpha)\,d\alpha$$

Por lo que queda $I := \displaystyle\int \frac{2\sec(\alpha)\tan(\alpha)}{2\sec(\alpha)\cdot 2\tan(\alpha)}\,d\alpha \rightarrow \frac{\alpha}{2}$

Regresando el cambio de variable $I(x) := \dfrac{1}{2}\,\mathrm{asec}\left(\dfrac{x}{2}\right)$

Sustituyendo en la integral impropia

Ojo son dos valores impropios

$$I_{impropia} := \lim_{\beta \to 2^+} (I(4) - I(\beta)) + \lim_{\varphi \to \infty} (I(\varphi) - I(4)) \rightarrow \frac{\pi}{4}$$

CONVERGE